Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

16 Ιουνίου 2017

Θέμα 1. [0.5]
Για $a, h > 0$ υπολογίστε τον όγκο του $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 \leq y \leq h - z,\ z \in [0,h]\}$.

Θέμα 2. [0.5]
Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ η τομή του ελλειπτικού κυλίνδρου $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ με το ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ $(a, b, c > 0)$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_n = \int_M (a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)^{n-\frac{1}{2}}\, d(x,y,z), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 3. [0.5 + 0.5 + 0.5]
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $D \subset A$ Jordan-μετρήσιμο και $f : A \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in D, \\ 0, & \bar{x} \in A \setminus D. \end{cases}$

(α') Αιτιολογήστε ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού.

(β') Αιτιολογήστε με χρήση ενός θεωρήματος ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

(γ') Αιτιολογήστε ότι ένας κύκλος $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ με $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$, έχει μηδενικό (διδιάστατο) μέτρο.

Θέμα 4. [0.5 + 0.5 + 1.5]
Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$ το χωρίο με σύνορο την κλειστή πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία $(0,0)$, (x_1, y_1), $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, (x_2, y_2), $(0,0)$ με αυτή τη σειρά, όπου $x_1 > x_2 > 0$, $y_2 > y_1 > 0$. Δείξτε ότι το εμβαδό του K είναι $v(K) = c$, όπου $c = y_2x_1 - y_1x_2$,

(α') με χρήση του Θεωρήματος του Green,

(β') με χρήση του εξωτερικού (διανυσματικού) γινομένου δύο κατάλληλων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$,

(γ') εκφράζοντας το K ως κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των x.

Θέμα 5. [0.4 + 0.4 + 0.4 + 0.4 + 0.6 + 0.6 + 0.6 + 0.6]
Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{f}(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$ και έστω $V \subset \mathbb{R}^3$ το χωρίο που περικλείεται από τον κυκλικό δίσκο $x^2+y^2 \leq R^2$, $R > 0$, στο επίπεδο $0xy$ και από το παραβολοειδές $z = R^2 - x^2 - y^2$.

(α') Δείξτε ότι ο κυκλικός δίσκος είναι κανονικό χωρίο ως προς τα x και y.

(β') Δείξτε ότι το V είναι κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο $0xy$.

(γ') Υπολογίστε τον όγκο του V.

(δ') Υπολογίστε το εμβαδό του ∂V.

(ε') Επαληθεύστε το Θεώρημα του Gauss για τα $\bar{f}$ και V.

(στ') Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes για την $\bar{f}$ και το τμήμα S_α του ∂V που βρίσκεται πάνω στο παραβολοειδές.

(ζ') Έστω $C \subset \mathbb{R}^3$ η τομή του S_α με το επίπεδο $x = 0$. Υπολογίστε το μήκος της C.

(η') Θεωρώντας ότι η C έχει αρχικό σημείο το $(0, R, 0)$ και τελικό σημείο το $(0, -R, 0)$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_C \bar{f} \cdot d(x,y,z)$.

Θέμα 6. [1]
Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει κάποιο $C > 0$ έτσι ώστε $|f_n(x)| \leq C$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!